Zur Bose-Statistik (Nachtrag)

Von Gerhard Schubert*

(Z. Naturforschg. 2 a, 250—251 [1947]; eingegangen am 11. März 1947)

Zu der kürzlich[1] abgeleiteten Erweiterung der Bose-Verteilungsfunktion um Glieder der Ordnung $1/N$ (N = Teilchenzahl) wird eine Ergänzung gebracht.

Wir betrachten wieder ein ideales Bose-Gas von N Teilchen. Die als nicht entartet angenommenen Energieniveaus seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ Wir zeigten in der vorigen Arbeit[1], daß man in einer konsequenten Theorie zwischen der maximalen Besetzungszahl eines Energieniveaus ∞ (Bose) und N (Gentile) nicht zu unterscheiden braucht.

Für die Zustandssumme unseres Systems ergab sich im Bose-Fall:

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \oint w^{-N-1} \prod_j (1 - w x_j)^{-1} dw \tag{1}$$

mit

$$x_j = e^{-\frac{\varepsilon_j}{kT}}.$$

Die mittlere Besetzungszahl des Energieniveaus ε_λ ist:

$$\bar{n}_\lambda = \frac{\partial \log Z}{\partial \log x_\lambda} = \frac{\oint w^{-N} x_\lambda (1 - w x_\lambda)^{-1} \prod_j (1 - w x_j)^{-1} dw}{\oint w^{-N-1} \prod_j (1 - w x_j)^{-1} dw}. \tag{2}$$

Bei der Auswertung der Integrale nach der Sattelpunktsmethode muß man nun berücksichtigen, daß sich die Sattelpunkte der beiden Integranden um ein Glied der Ordnung $1/N$ unterscheiden. Zu diesem Zweck werten wir (1) nach der Sattelpunktsmethode aus [s.[1] Gl. (18)!]:

$$Z = [r^N \sqrt{\pi F_2(r, x_j)} \prod_j (1 - r x_j)]^{-1} [1 + O(F_2^{-1/2})]. \tag{3}$$

Dabei ist der Sattelpunkt durch

$$\sum_j \frac{r x_j}{1 - r x_j} = N + 1 \tag{4}$$

gegeben. Außerdem ist die Abkürzung

$$F_2(r, x_j) = \sum_j \frac{r x_j}{(1 - r x_j)^2} \tag{5}$$

verwendet. Für später brauchen wir auch folgende Abkürzung

$$F_3(r, x_j) = \sum_j \frac{r x_j + (r x_j)^2}{(1 - r x_j)^3}. \tag{6}$$

Wir berücksichtigen nun die erwähnte Abweichung des Sattelpunkts des Zählerintegranden in Gl. (2) vom Sattelpunkt r des Nennerintegranden, indem wir bei der Differentiation von $\log Z$ nach $\log x_\lambda$ gemäß dem linken Teil der Gl. (2) die durch Gl. (4) implizit gegebene Abhängigkeit der Größe r von x_λ beachten:

$$\bar{n}_\lambda = \frac{\partial \log Z}{\partial \log x_\lambda} = x_\lambda \left\{ \left(\frac{\partial \log Z}{\partial x_\lambda} \right)_r + \left(\frac{\partial \log Z}{\partial r} \right)_{x_\lambda} \frac{\partial r}{\partial x_\lambda} \right\} \ldots \tag{7}$$

Wir differenzieren jetzt Gl. (4) nach x_λ:

$$\frac{r}{(1 - r x_\lambda)^2} + \frac{\partial r}{\partial x_\lambda} \sum_j \frac{x_j}{(1 - r x)^2} = 0.$$

Bei Verwendung von Gl. (5) finden wir

$$\frac{\partial r}{\partial x_\lambda} = - \frac{r^2}{F_2 (1 - r x_\lambda)^2}. \tag{8}$$

Endlich wird aus Gl. (7) unter Benützung von (3), (8), (5) und (6) nach kurzer Zwischenrechnung[2]

* Herrsching am Ammersee, Fischergasse 12.

[1] G. Schubert, Z. Naturforschg. 1, 113 [1946].

[2] Integriert man in (1) längs eines Kreises vom Radius r', wobei r' durch (4) *ohne* die 1 auf der rechten Seite definiert ist, so erhält man ein etwas anderes Korrektionsglied, das mir Hr. Dr. Leibfried, Göttingen, freundlicherweise kürzlich mitteilte. Das rührt von dem Unterschied um ein Glied der Ordnung $1/N$ zwischen r und r' her. Das Bose-Glied mit r' ist dann nämlich von dem Bose-Glied mit r verschieden.

$$\bar{n}_\lambda = \overset{\text{(Bose)}}{\frac{r\,x_\lambda}{1 - r\,x_\lambda}} - \frac{1}{2\,F_2^{\,2}} \overset{\text{(1. Korrektionsglied)}}{\left\{(2\,F_2 - F_3)\frac{r\,x_\lambda}{(1 - r\,x_\lambda)^2} + F_2\,\frac{r\,x_\lambda + (r\,x_\lambda)^2}{(1 - r\,x_\lambda)^3}\right\}} + O\,(F_2^{\,-3/2})\,. \tag{9}$$

In der früheren Arbeit, vergl. dort (21)+, hatte sich nur

$$\bar{n}_\lambda = \frac{r\,x_\lambda}{1 - r\,x_\lambda} - \frac{1}{2\,F_2}\,\frac{r\,x_\lambda + (r\,x_\lambda)^2}{(1 - r\,x_\lambda)^3}$$

ergeben.

Bildet man aus (9) $\sum_\lambda \bar{n}_\lambda$, so ergibt sich bei Beachtung von (4), (5) und (6) gerade N, wie es sein muß.

Oberhalb der Einsteinschen Kondensationstemperatur T_{krit} sind F_2 und F_3 von der Größenordnung N, das Korrektionsglied in (9) also von der Ordnung $1/N$. Für $T \leqq T_{\text{krit}}$ ist die Berechnung der Zustandssumme in der in [1] durchgeführten Weise aus Konvergenzgründen nicht mehr möglich. Dann wären aber ohnehin andere Methoden anzuwenden. Man darf nämlich bei diesen tiefsten Temperaturen das Bose-Gas nicht mehr als ideal betrachten, da die Wechselwirkungsenergie zwischen den Teilchen nicht mehr vernachlässigbar klein gegen ihre kinetische Energie ist.

Anmerkung: In der Arbeit[1] sind folgende Druckfehler zu berichtigen: In den Formeln (15), (16) und (17) sind die Ausdrücke

$$+\pi\sqrt{\frac{F_2}{2}} \quad \text{und} \quad -\pi\sqrt{\frac{F_2}{2}}$$

oben und unten an die Integrale als Grenzen zu schreiben statt als Faktoren bzw. Summanden in den Formeln.

In Gl. (20), vierter Bruch, muß es $F_{2\nu}$ statt $F_2\,\nu$ heißen.

Gl. (21), dritter Ausdruck: Im Zähler des ersten Hauptzählerbruches muß beidemale x_λ statt x_j stehen.

Zur Deutung der bei Anregung in der Hohlkathode beobachteten Anomalie von CuH

Von Lieselotte Reinebeck

Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik, Hechingen

(Z. Naturforschg. **2a**, 251—259 [1947]; eingegangen am 25. Oktober 1946)

Bei Anregung in der Schülerschen Hohlkathode tritt eine anomale Intensitätsverteilung beim CuH auf. Für diese Erscheinung sind zwei Deutungen möglich: 1. Als Prädissoziationseffekt, d. h. als eine Eigenschaft des angeregten CuH-Moleküls im Gasraum, und 2. als ein Effekt, der auf Oberflächeneigenschaften der Kupferkathode beruht. Die Beobachtungen des gleichen anomalen Verhaltens im zweiten höher angeregten Zustand des Kupferhydrids und der normale Intensitätsverlauf des CuD-Spektrums entscheiden nun eindeutig für die Deutung als Oberflächenprozeß. Die Möglichkeit, Oberflächeneffekte unter Einschaltung des Zerstäubungsprozesses der Entladung unverändert in der Gasphase zu beobachten, ist bisher noch nicht bekannt. Bemerkenswert ist auch das stark unterschiedliche Verhalten der H-Verbindung gegenüber der entsprechenden D-Verbindung.

In früheren Arbeiten[1,2] zeigten Schüler und Mitarbeiter, daß die Hohlkathode durch ihre Eigenschaften für Untersuchungen an Metallhydriden besonders geeignet ist. So wurden u. a. auch Versuche mit einer Kupferhohlkathode angestellt, die mit flüssiger Luft oder auch mit Wasser gekühlt wurde. Während bei Anregung im Bogen (der auch bei den Untersuchungen von Heimer, von Frerichs und Bengtsson[3] benutzt wurde) die Verteilung der Moleküle auf die Rotationsniveaus der Boltzmann-Statistik entspricht, zeigen die Aufnahmen bei Anregung mit der gekühlten Hohlkathode einen völlig davon ab-

[1] H. Schüler u. H. Gollnow, Z. Physik **108**, 714 [1938].

[2] H. Schüler, H. Gollnow, H. Haber, Z. Physik **111**, 484 [1939].

[3] A. u. T. Heimer, Z. Physik **84**, 222 [1933]; auch R. Frerichs, Z. Physik **20**, 170 [1923] und E. Bentgsson, ebenda 229 [1923].